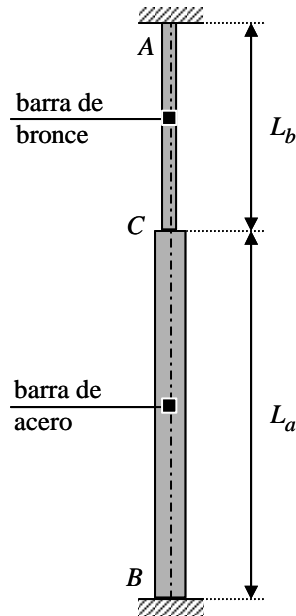


Ejercicio N° 3- Enunciado

Las barras que se observan en la figura 3.1 están unidas entre sí en forma rígida y empotradas en ambos extremos, siendo la barra superior de bronce y la inferior de acero, de acuerdo con los datos indicados en la tabla 3.1:

**Figura 3.1**

L_b	L_a	F_b	F_a	γ_b	γ_a	E_b	E_a
m	m	cm ²	cm ²	kN/m ³	kN/m ³	kN/cm ²	kN/cm ²
3	5	20	90	80	78	$9 \cdot 10^3$	$21 \cdot 10^3$

F_b, F_a : Áreas de las secciones transversales de las barras

γ_b, γ_a : Pesos específicos de las barras

E_b, E_a : Módulos de elasticidad longitudinal de las barras

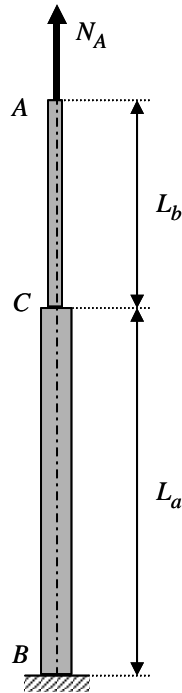
Tabla 3.1

Considerando solamente los pesos propios de las mismas, se solicita lo siguiente:

1. Calcular las reacciones de vínculo
2. Trazar los diagramas de esfuerzos normales N_z y tensiones normales σ_z

Ejercicio N° 3- Resolución**1. Cálculo de las reacciones de vínculo****A. Cálculo de N_A**

En primer lugar, como se muestra en la figura 3.2, se libera el empotramiento superior A, para poner en evidencia la respectiva reacción N_A , la cual origina un esfuerzo de tracción, pues actuando en el punto A, debe producir una deformación del sistema que resulte nula.

**Figura 3.2**

Es decir, debe cumplirse la siguiente ecuación de compatibilidad geométrica de la barra escalonada:

$$\Delta l - \Delta l' - \Delta l'' = 0 \quad (1)$$

Siendo:

$\Delta l'$: Acortamiento del tramo superior de la barra, producido por efecto de su propio peso (P_b)

$\Delta l''$: Acortamiento del tramo inferior de la barra, producido por efecto de su propio peso (P_a) y del de la barra correspondiente al tramo superior (P_b)

Δl : Alargamiento que producen en la barra escalonada la reacción de vínculo (N_A) para neutralizar los acortamientos $\Delta l'$ y $\Delta l''$, teniendo en cuenta la condición de invariabilidad geométrica que imponen dichos vínculos

Las expresiones de cada uno de estos desplazamientos son los que se indican a continuación.

Por un lado:

$$\Delta l = N_A \cdot \left(\frac{L_b}{E_b \cdot F_b} + \frac{L_a}{E_a \cdot F_a} \right) \quad (2)$$

En cuanto a la influencia del peso propio de cada tramo de la barra escalonada en las deformaciones de la misma se tiene:

- **Tramo superior de la barra (barra de bronce)**

Para estudiar dicha influencia se realiza el siguiente análisis:

Para una sección cualquiera, ubicada a una distancia z a partir del extremo superior de la barra se toma otra separada una distancia dz de la misma, según se observa en la figura 3.3:

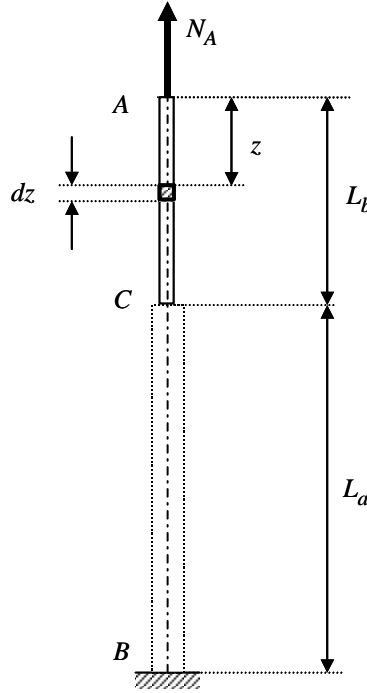


Figura 3.3

En dicha sección elemental, se produce una acortamiento dado por:

$$\Delta dz = \frac{\gamma_b \cdot F_b \cdot z}{E_b \cdot F_b} \cdot dz$$

Integrando esta expresión entre $z = 0$ y $z = L_b$, se tiene:

$$\Delta l' = \int_{z=0}^{z=L_b} \frac{\gamma_b \cdot F_b \cdot z}{E_b \cdot F_b} \cdot dz = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma_b \cdot F_b \cdot L_b^2}{E_b \cdot F_b}$$

Siendo el peso propio de la barra de bronce P_b :

$$P_b = \gamma_b \cdot F_b \cdot L_b$$

En definitiva:

$$\Delta l' = \frac{1}{2} \cdot \frac{P_b \cdot L_b}{E_b \cdot F_b} \quad (3)$$

Como conclusión, se deduce que la variación de longitud que experimenta una barra de sección constante sometida a una sollicitación axial debida a su propio peso es la misma que se produciría en una barra de iguales características y peso propio despreciable, pero sometida a una carga externa igual a la mitad de su peso propio aplicada en su extremo.

- **Tramo inferior de la barra (barra de acero)**

En dicho tramo se observa lo indicado en figura 3.4:

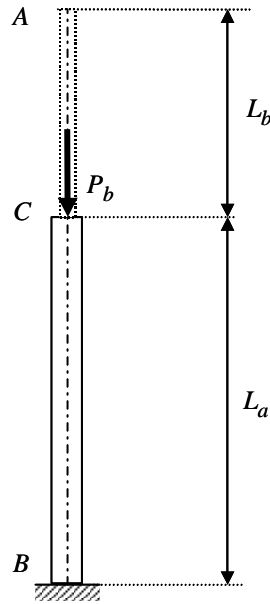


Figura 3.4

En el punto C se encuentra actuando el peso propio P_b de la barra de bronce y en el punto B a dicha carga se le suma la influencia de su propio peso P_a .

Finalmente, razonando de manera análoga al caso anterior, la expresión correspondiente a este desplazamiento será:

$$\Delta l'' = \frac{P_b \cdot L_a}{E_a \cdot F_a} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P_a \cdot L_a}{E_a \cdot F_a} \quad (4)$$

Por último, reemplazando (2), (3) y (4) en la expresión (1):

$$N_A \cdot \left(\frac{L_b}{E_b \cdot F_b} + \frac{L_a}{E_a \cdot F_a} \right) - \frac{P_b}{2} \cdot \frac{L_b}{E_b \cdot F_b} - P_b \cdot \frac{L_a}{E_a \cdot F_a} - \frac{P_a}{2} \cdot \frac{L_a}{E_a \cdot F_a} = 0$$

Agrupando términos:

$$\left(N_A - \frac{P_b}{2} \right) \cdot \frac{L_b}{E_b \cdot F_b} + \left(N_A - P_b - \frac{P_a}{2} \right) \cdot \frac{L_a}{E_a \cdot F_a} = 0 \quad (5)$$

Siendo los pesos propios de cada tramo de la barra escalonada:

Barra de bronce:

$$P_b = \gamma_b \cdot F_b \cdot L_b = 80 \cdot 0,0020 \cdot 3 = 0,48 \cdot kN$$

Barra de acero:

$$P_a = \gamma_a \cdot F_a \cdot L_a = 78 \cdot 0,0090 \cdot 5 = 3,51 \cdot kN$$

<i>Cátedra: Ing. José Luis Tavorro</i>	<i>TP 1</i>	<i>3/5</i>
--	-------------	------------

Reemplazando por los valores en la expresión (5):

$$\left(N_A - \frac{0,48}{2}\right) \cdot \frac{300}{9 \cdot 10^3 \cdot 20} + \left(N_A - 0,48 - \frac{3,51}{2}\right) \cdot \frac{500}{21 \cdot 10^3 \cdot 90} = 0$$

$$(N_A - 0,24) \cdot \frac{1,6667}{10^3} + (N_A - 2,235) \cdot \frac{0,2646}{10^3} = 0$$

$$(1,6667 + 0,2646) \cdot \frac{N_A}{10^3} - \frac{1}{10^3} (0,4000 + 0,5914) = 0$$

$$1,9313 \cdot N_A = 0,9914$$

$$N_A = 0,513 \cdot kN$$

B. Cálculo de N_B

Planteando la ecuación de equilibrio estático:

$$N_A + N_B - P_a - P_b = 0$$

En consecuencia:

$$N_B = P_a + P_b - N_A$$

Reemplazando por los valores:

$$N_B = 3,51 + 0,48 - 0,513$$

$$N_B = 3,477 \cdot kN$$

2. Trazado de los diagramas de esfuerzos normales N_z y de tensiones σ_z

A. Cálculo de los esfuerzos normales N_z para los niveles límites

Nivel A:

$$N_{z(A)} = N_A = 0,513 \cdot kN \quad (\text{tracción})$$

Nivel C:

$$N_{z(C)} = N_{z(A)} - P_b = 0,513 - 0,480 = 0,033 \cdot kN \quad (\text{tracción})$$

Nivel B:

$$N_{z(B)} = N_B = -3,477 \cdot kN \quad (\text{compresión})$$

B. Cálculo de las tensiones normales σ_z para los niveles límites

$$\sigma_{z(A)} = \frac{N_{z(A)}}{F_b} = \frac{0,513}{20} = 0,026 \cdot \frac{kN}{cm^2} \quad ; \quad \sigma_{z(A)} = 2,6 \cdot \frac{daN}{cm^2}$$

$$\sigma_{z(C)} = \frac{N_{z(C)}}{F_b} = \frac{0,033}{20} = 0,0017 \cdot \frac{kN}{cm^2} \quad ; \quad \sigma_{z(C)} = 0,17 \cdot \frac{daN}{cm^2}$$

$$\sigma_{z(C'')} = \frac{N_{z(C)}}{F_a} = \frac{0,033}{90} = 0,0004 \cdot \text{kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_{z(C'')} = 0,04 \cdot \text{daN/cm}^2$$

$$\sigma_{z(B)} = \frac{N_{z(B)}}{F_a} = \frac{-3,477}{90} = -0,039 \cdot \text{kN/cm}^2 \quad ; \quad \sigma_{z(B)} = -3,9 \cdot \text{daN/cm}^2$$

Los respectivos diagramas se muestran en la figura 3.5:

$$\text{Esc}_{N_z} = 1 \cdot \text{kN/cm} \quad \text{Esc}_{\sigma_z} = 1 \cdot \text{daN} \cdot \text{cm}^{-2} / \text{cm}$$

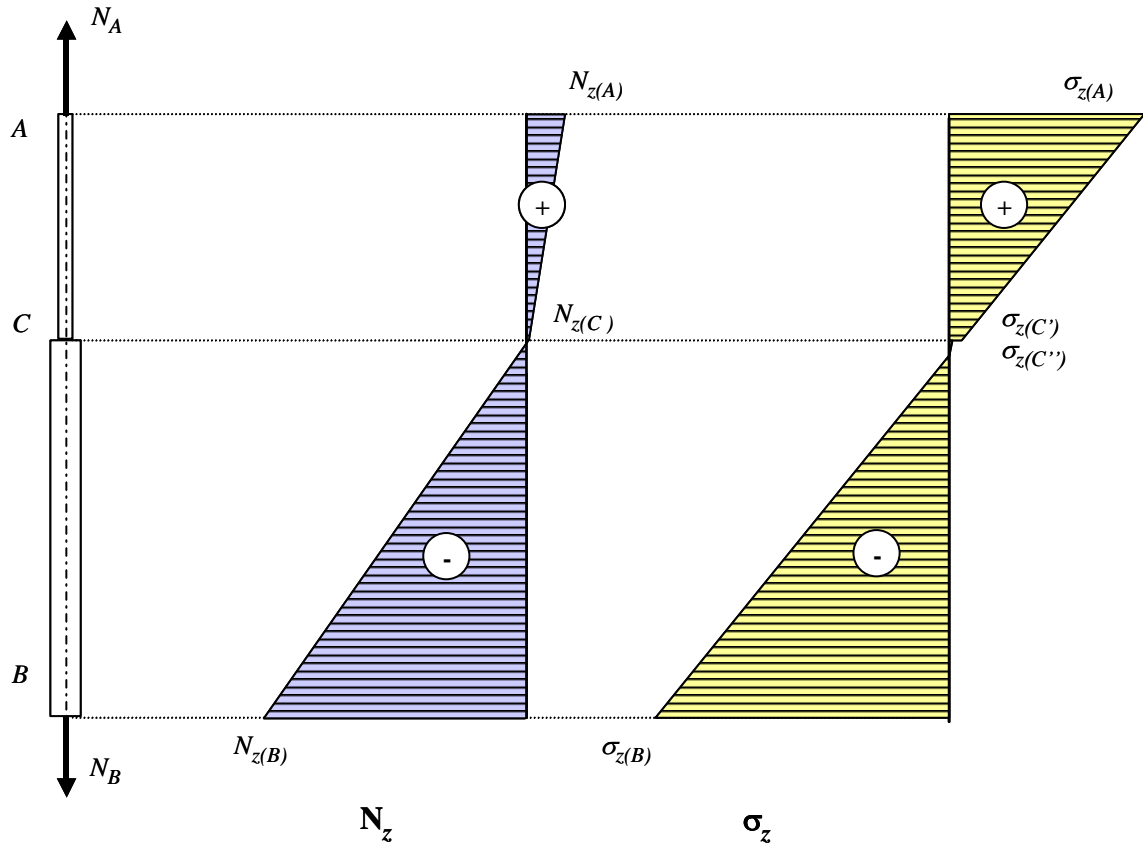


Figura 3.5